ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Φεβρουάριος 2014

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>Θέμα 1</u> : Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 2 και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών

x_i	-1	0	1
f_i	2	1	0

χρησιμοποιώντας παρεμβολή.

<u>Θέμα 2</u> : Δοθέντος ότι η συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	-3	-2	-1	1	2	3
f_i	-25	0	9	3	0	5

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ και $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η f.

<u>Θέμα 3</u> : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$. Να αποδείξετε ότι αυτή έχει μια μοναδική ρίζα ξ που βρίσκεται στο διάστημα $I = [0,1]$. Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνονται οι αλγόριθμοι

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2 + x_n^2 - x_n^3\right) \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \text{και}$$

$$x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 5x_n - 2, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Να αποδείξετε ότι ο πρώτος αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα ξ για κάθε x_0 που βρίσκεται στο διάστημα $I = [0,1]$, ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος δεν συγκλίνει.

<u>Θέμα 4</u> : Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με φυσική οδήγηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

ΘΕΜΑ 3ο   ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ

ΝΔΟ η εξίσωση $f(x)=x^3-x^2+4x-2=0$ έχει μια μοναδική ρίζα στο $I=[0,1]$. Για την εξίσωση της ρίζας αυτής προτείνονται οι αλγόριθμοι

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(2+x_n^2-x_n^3\right),\ n=0,1,2,\dots$$

και

$$x_{n+1}=x_n^3-x_n^2+5x_n-2,\ n=0,1,2,\dots$$

ΝΔΟ ο 1ος αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)=0$ $\forall x_0\in I$, ενώ ο 2ος δεν συγκλίνει πουθενά.

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-2<0 \\ f(1)=2>0 \end{array}\right| \Rightarrow sgn(f(0))\neq sgn(f(1)) \overset{\Theta E T}{\Rightarrow} \exists \xi\in(0,1): f(\xi)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2x+4=0 \\ \Delta=4-4\cdot3\cdot4<0 \end{array}\right| \Rightarrow$$ Άρα, η $f\uparrow$ στο $[0,1]$. Συνεπώς, η ξ μοναδική στο $[0,1]$

Βλέπουμε, ότι $x_{n+1}=\frac{1}{4}(2+x_n^2-x_n^3)$ έχει άμεση συσχέτιση με την $f(x)=0$

$[\varphi(x)=x \Leftrightarrow f(x)=0]$

$\varphi(x_n)=x_{n+1}$, άρα $\varphi(x)=\frac{1}{4}(2+x^2-x^3)$, $\forall x\in[0,1]$

$\varphi'(x)=\frac{1}{4}(2x-3x^2)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\frac{2}{3}$

x	0		$2/3$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\varphi([0,1])=\varphi([0,\tfrac{2}{3}])\cup\varphi([\tfrac{2}{3},1]) =$$
$$=[\varphi(0),\varphi(\tfrac{2}{3})]\cup[\varphi(1),\varphi(\tfrac{2}{3})] =$$
$$=[\tfrac{1}{2},\tfrac{422}{729}]\cup[\tfrac{1}{2},\tfrac{422}{729}] =$$
$$=[\tfrac{1}{2},\tfrac{422}{729}]\subseteq[0,1]$$ καλώς ορισμένη

Ενώ, $L=\max_{x\in[0,1]}|\varphi'(x)|=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|2x-3x^2| =$

$$=\frac{1}{4}\left(\max_{x\in[0,\frac{2}{3}]}|2x-3x^2|+\max_{x\in[\frac{2}{3},1]}|2x-3x^2|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}<1$$

συστολή

Συνεπώς, πληρούνται οι υποθέσεις του Θ. συστολής και άρα, η $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2 + x_n^2 - x_n^3)$, $n = 0,1,2\ldots$

συγκλίνει στη μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο $[0,1]$

Τώρα, για την $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 5x_n - 2$

Μέσω μιας αναδιάταξης

Εάν η ακολουθία $x_n, n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης $g(x) = x - x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

Θέτουμε, συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$

$\varphi'(x) = 3x^2 - 2x + 5, \ \forall x \in [0,1]$

$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 5 < 0$

$\longrightarrow$ Άρα, η $\varphi \uparrow : [0,1]$

$\varphi([0,1]) = [\varphi(0), \varphi(1)] = [-2, 3] \not\subseteq [0,1]$ όχι καλά ορισμένη

Άρα, πράγματι η $x_n, n \in \mathbb{N}$ στην περίπτωση του 2ου αλγορίθμου δεν θα συγκλίνει στη μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο $[0,1]$.